FR_49: — Le lien discret-continu par classes d'équivalence

UNIHOLOG

Ce document reconstruit le développement de FR_49 sur le lien entre le discret et le continu, formulé sans identifier faussement N avec R.

Le point central n'est pas que l'ensemble des naturels et l'ensemble des réels soient équivalents comme structures. Ils ne le sont pas. Le point central est plus précis : une construction discrète indexée par N et une construction continue définie sur R peuvent déterminer exactement le même objet mathématique de R.

Cet objet commun agit comme lien.

Dans FR_49, ce lien s'exprime au moyen de familles ou classes d'équivalence du type U_e, U_π, U_φ, $U_{\tilde{n}}$, U_g et, sous forme générale, U_{f_i}.

Toutes les formules de ce document utilisent exclusivement `<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="inline"><mrow><mo>.</mo><mo>.</mo><mo>.</mo></mrow></math>` pour les expressions en ligne et `<math`

xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block"><mrow>
<mo>.</mo><mo>.</mo><mo>.</mo></mrow></math>
pour les blocs.

---

1. Point de départ

Soit $\alpha \in R$ une constante réelle.

Une même constante peut apparaître au moyen d'expressions de nature différente.

Par exemple, elle peut apparaître comme limite d'une suite :

$$\lim_{n \to \infty} \; a_n = \alpha,$$

où l'indice n appartient à N.

Elle peut aussi apparaître au moyen d'un processus continu :

$$\lim_{dx \to 0} \; Q(F, x, dx) = \alpha,$$

où x et dx appartiennent au cadre de variation de R.

La première construction utilise une structure discrète :

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

La seconde utilise une structure continue :

$$dx \to 0 \, .$$

Cependant, si les deux constructions déterminent la même valeur α, alors elles appartiennent à une même classe relativement à leur valeur.

Le lien n'est pas une identité entre domaines.

Le lien est la valeur commune.

---

2. Distinction fondamentale entre expression finie, processus limite et valeur

Avant de définir les classes U_α, il convient de séparer trois niveaux.

2.1 Expression finie dépendant d'un paramètre

Une expression comme

$$(1+\frac{1}{n})^n$$

dépend de n.

Pour une valeur finie de n, elle n'est généralement pas égale à sa limite.

Par conséquent,

$$(1+\frac{1}{n})^n \neq e$$

pour tout n fini.

2.2 Processus limite

Le processus complet

$$\lim_{n\to\infty}\ (1+\frac{1}{n})^n$$

détermine bien exactement e.

L'expression finie n'appartient pas à U_e comme expression exacte, mais le processus limite complet appartient bien à U_e.

2.3 Valeur déterminée

La valeur déterminée par le processus est l'objet mathématique :

$$e\ .$$

Ainsi, FR_49 distingue :

1. les approximations finies ;
2. les processus limites ;
3. les valeurs exactes déterminées par ces processus.

Cette distinction évite de confondre une suite d'approximations avec la constante elle-même.

---

3. Définition de U_α

Soit $\alpha \in R$.

Nous définissons U_α comme l'ensemble des expressions, définitions, processus ou constructions mathématiques qui déterminent exactement la valeur α.

Formellement :

$$U_\alpha = \{A\text{: valor } (A) = \alpha\}\ .$$

Ici valor (A) doit être compris comme la valeur mathématique déterminée par A, lorsque cette valeur est bien définie.

Si A est une expression exacte, alors $\text{valor}\,(A)$ est sa valeur directe.

Si A est un processus limite, alors $\text{valor}\,(A)$ est la limite, si elle existe.

Par exemple :

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

détermine e.

De même :

$$B = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

détermine e.

Donc :

$$A \in U_e$$

et

$$B \in U_e \ .$$

---

4. Relation d'équivalence associée

Pour une constante fixe $\alpha \in R$, nous définissons la relation :

$$A \sim_\alpha B \Leftrightarrow \text{valor}\,(A) = \text{valor}\,(B) = \alpha \ .$$

Cette relation identifie les expressions par leur valeur commune, non par leur forme syntaxique ni par leur procédé d'obtention.

Théorème 1 — $\sim_\alpha$ est une relation d'équivalence

Soit $\alpha \in R$ et soit U_α l'ensemble des constructions qui déterminent α. Alors $\sim_\alpha$ est une relation d'équivalence sur U_α.

Démonstration

Réflexivité :

Si $A \in U_\alpha$, alors

$$\text{valor}\,(A) = \alpha\,.$$

Donc :

$$A \sim_\alpha A\,.$$

Symétrie :

Si $A \sim_\alpha B$, alors :

$$\text{valor}\,(A) = \text{valor}\,(B) = \alpha\,.$$

Par symétrie de l'égalité :

$$\text{valor}\,(B) = \text{valor}\,(A) = \alpha\,.$$

Donc :

$$B \sim_\alpha A\,.$$

Transitivité :

Si $A \sim_\alpha B$ et $B \sim_\alpha C$, alors :

$$\text{valor}\,(A) = \text{valor}\,(B) = \alpha$$

et

$$\text{valor}\,(B) = \ \text{valor}\,(C) = \alpha\,.$$

Par conséquent :

$$\text{valor}\,(A) = \ \text{valor}\,(C) = \alpha\,.$$

Donc :

$$A \sim_\alpha C\,.$$

Ainsi, $\sim_\alpha$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence.

---

5. Lien entre N et R

Soit $\alpha \in R$.

Supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in N}$ telle que :

$$\lim_{n \to \infty} \ a_n = \alpha\,.$$

Supposons aussi qu'il existe un processus continu associé à une fonction F tel que :

$$\lim_{dx \to 0} \ Q(F, x, dx) = \alpha\,.$$

Alors les deux constructions appartiennent à U_α.

La situation peut se représenter schématiquement ainsi :

$$N \xrightarrow{n} \alpha \xleftarrow{\infty dx} R\,.^{0}$$

Cette écriture ne signifie pas :

$$N = R\,.$$

Elle ne signifie pas non plus :

$$N \cong R$$

comme ensembles, espaces topologiques, corps ou structures d'ordre.

Elle signifie seulement que deux procédés définis depuis des natures différentes peuvent déterminer le même élément α de R.

Théorème 2 — Lien discret-continu

Soit $\alpha \in R$. S'il existe une construction discrète A_N indexée par N et une construction continue A_R définie sur R telles que :

$$\text{valor}\,(A_N) = \alpha$$

et

$$\text{valor}\,(A_R) = \alpha,$$

alors :

$$A_N \sim_\alpha A_R\ .$$

Par conséquent, A_N et A_R appartiennent à la même classe U_α.

Démonstration

Par hypothèse :

$$\text{valor}\,(A_N) = \alpha$$

et

$$\text{valor}\,(A_R) = \alpha\,.$$

Alors :

$$\text{valor}\,(A_N) = \ \text{valor}\,(A_R) = \alpha\,.$$

Par définition de $\sim_\alpha$:

$$A_N \sim_\alpha A_R \ .$$

Donc :

$$A_N , A_R \in U_\alpha \ .$$

Ce qui démontre le résultat.

---

6. Application à e

La constante e constitue un exemple central, car elle apparaît naturellement dans des constructions discrètes comme dans des caractérisations continues.

6.1 Construction discrète

Considérons la suite :

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n , \qquad n \in N .$$

Alors :

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e .$$

La construction est indexée par des valeurs discrètes :

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

La valeur e apparaît comme limite lorsque :

$$n \to \infty \ .$$

Donc :

$$N \xrightarrow{n} \overrightarrow{e}^{\infty}$$

Cette expression n'affirme pas que $e \in N$.

Elle affirme qu'une suite indexée par N détermine, à la limite, un élément de R.

6.2 Construction par série

On a aussi :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} .$$

Cette représentation possède aussi une structure discrète, puisqu'elle est indexée par $k \in N$.

L'objet déterminé est le même :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e .$$

6.3 Caractérisation continue

Considérons la fonction :

$$f(x) = e^x .$$

Sa dérivée est définie par :

$$f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} .$$

En substituant :

$$f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} .$$

En factorisant :

$$f'(x) = e^x \lim_{dx \to 0} \frac{e^{dx} - 1}{dx}.$$

La base e est caractérisée par :

$$\lim_{dx \to 0} \frac{e^{dx} - 1}{dx} = 1.$$

Par conséquent :

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

En particulier :

$$e = e^1.$$

Ici, e apparaît dans une structure continue liée à la limite différentielle :

$$dx \to 0.$$

Ainsi :

$$R \overset{dx \to 0}{\to} e.$$

6.4 Classe U_e

Nous définissons :

$$U_e = \{E_i : \text{valor}(E_i) = e\}.$$

Des exemples d'éléments de U_e sont :

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

$$\exp(1),$$

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$$

comme caractérisation indirecte de e, c'est-à-dire que e est l'unique réel positif qui satisfait :

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1\,.$$

Ces expressions n'ont pas toutes la même forme. Certaines sont des limites, d'autres des séries, d'autres des valeurs fonctionnelles et d'autres des caractérisations implicites.

Cependant, toutes déterminent e.

Elles appartiennent donc à la même classe U_e.

6.5 U_e connu et U_e inconnu

L'ensemble total U_e peut être divisé conceptuellement en deux régions :

$$U_e = U_e^{\text{connu}} \cup U_e^{\text{inconnu}}\,.$$

Ici U_e^{connu} représente les expressions déjà identifiées, vérifiées ou acceptées comme déterminations de e dans un cadre mathématique donné.

Par exemple :

$$\exp(1) \in U_e^{\text{connu}}\,.$$

De même :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \in U_e^{\text{connu}}\,.$$

Et :

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in U_e^{\text{connu}} .$$

En revanche, U_e^{inconnu} désigne les expressions non encore découvertes, non classées ou non démontrées comme équivalentes à e.

Cette division n'est pas ontologique, mais épistémologique.

La valeur e ne change pas parce qu'une expression est connue ou inconnue.

Ce qui change, c'est notre catalogue d'expressions reconnues.

6.6 Énumération des expressions

Si l'on fixe un langage formel avec un alphabet fini ou dénombrable et des règles syntaxiques effectives, l'ensemble des expressions finies de ce langage est dénombrable.

Il est donc possible de les énumérer syntaxiquement :

$$E_1, E_2, E_3, \ldots$$

Cependant, toute expression syntaxique ne détermine pas nécessairement une valeur réelle.

Et il n'existe pas toujours de procédure générale permettant de décider, pour toute expression suffisamment riche, si :

$$\text{valor}(E_i) = e .$$

Il peut donc exister une énumération syntaxique de candidats sans classification complète et effective de U_e.

Cette observation sépare trois choses :

1. énumérer les expressions possibles ;
2. évaluer les expressions bien définies ;
3. démontrer l'appartenance à U_e.

Corollaire 1 — Le catalogue connu est partiel

L'ensemble U_e^{connu} n'épuise pas nécessairement U_e.

Démonstration

Par définition, U_e^{connu} contient les expressions dont l'appartenance à U_e a été reconnue dans un cadre donné.

Mais la définition de U_e n'exige pas que ses éléments nous soient connus. Elle exige seulement qu'ils déterminent e.

Par conséquent, sauf si l'on démontre une caractérisation complète du langage et de toutes ses valeurs, on ne peut pas conclure que :

$$U_e^{\text{connu}} = U_e \ .$$

Le catalogue connu doit donc être traité comme partiel.

---

7. Application à π

La constante π apparaît elle aussi comme lien entre constructions discrètes et continues.

7.1 Série discrète

Une représentation classique est :

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

De manière équivalente :

$$\pi = \lim_{n \to \infty} 4 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Cette construction est indexée par :

$$n \in N.$$

Donc :

$$N \xrightarrow{n} \vec{\pi}.^{\infty}$$

7.2 Intégrale continue

On a aussi :

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

L'intégrale se construit au moyen de partitions d'un intervalle réel et du raffinement de ces partitions.

En termes d'échelle :

$$\Delta x \to 0.$$

Ainsi :

$$R \xrightarrow{\Delta x} \vec{\pi}.^{0}$$

7.3 Classe U_π

Nous définissons :

$$U_\pi = \{P_i : \text{valor}\,(P_i) = \pi\}\,.$$

Appartiennent alors à U_π :

$$4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

$$4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx,$$

$$\frac{C}{d}$$

lorsque C est la longueur d'une circonférence euclidienne et d son diamètre.

Ces expressions ne sont pas identiques comme procédés, mais elles sont équivalentes quant à la valeur qu'elles déterminent.

Donc :

$$N \to^{n} \vec{\pi} \leftarrow^{\infty \Delta x} \vec{R} \to 0.$$

Corollaire 2 — π comme invariant de représentations

La constante π agit comme invariant entre représentations géométriques, analytiques, intégrales et sérielles.

Démonstration

Toutes les expressions précédentes déterminent la même valeur π sous leurs hypothèses respectives.

Par définition de U_π :

$$P_i \in U_\pi \Leftrightarrow \text{valor}\,(P_i) = \pi\,.$$

Elles appartiennent donc toutes à la même classe d'équivalence.

---

8. Application à φ

Soit φ le nombre d'or :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Cette constante admet une définition algébrique exacte :

$$\varphi^2 = \varphi + 1\,.$$

Elle apparaît aussi comme limite des quotients des nombres de Fibonacci.

Soit (F_n) la suite définie par :

$$F_0 = 0,$$
$$F_1 = 1,$$

et

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,.$$

Alors :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi .$$

La construction par Fibonacci est discrète, puisqu'elle dépend de $n \in N$.

La construction algébrique appartient au corps réel.

Nous définissons :

$$U_\varphi = \{\Phi_i : \text{valor } (\Phi_i) = \varphi\} .$$

Alors :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in U_\varphi$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \in U_\varphi .$$

De nouveau :

$$N \xrightarrow{n \to \infty \text{ algebra}} \varphi \xleftarrow{} R .$$

La notation précédente est schématique : elle n'affirme pas que l'algèbre réelle soit un processus différentiel. Elle signale seulement que φ peut être déterminé à la fois depuis une récurrence discrète et depuis une équation exacte dans R.

---

9. Sur $U_{\tilde{n}}$

Dans FR_49 apparaît la nécessité de représenter le passage conceptuel entre un indice naturel n et une forme étendue, interpolée ou représentée dans un environnement continu. Pour cela, on introduit la notation ñ.

L'interprétation rigoureuse doit être prudente.

Il ne faut pas affirmer qu'un naturel n est identique à un réel continu.

On peut considérer une application d'inclusion :

$$\iota : N \to R$$

donnée par :

$$\iota(n) = n\,.$$

Cette inclusion permet de voir chaque nombre naturel comme un réel particulier, mais elle ne transforme pas N en R.

On peut aussi considérer une interpolation ou extension d'une suite discrète.

Si l'on a une suite :

$$a : N \to R,$$

on peut chercher une fonction :

$$\tilde{a} : R_{\geq 0} \to R$$

telle que :

$$\tilde{a}(n) = a_n$$

pour tout $n \in N$.

Dans ce contexte, ñ ne représente pas une égalité entre le discret et le continu. Il représente une extension, un codage ou une interpolation contrôlée.

Nous définissons alors :

$$U_{\tilde{n}} = \{N_i : \text{valor}\,(N_i) = \tilde{n}\},$$

à condition que ñ ait été préalablement défini dans le système.

Observation

$U_{\tilde{n}}$ ne doit pas être utilisé comme preuve que N et R sont équivalents.

Il doit être utilisé comme famille de représentations d'une extension ou image concrète d'un indice discret dans une construction plus large.

---

10. Sur U_g

Soit g une grandeur réelle déterminée par un modèle.

Par exemple, si g représente l'accélération gravitationnelle locale, il ne faut pas la traiter sans conditions comme une constante universelle absolue, car sa valeur dépend du lieu, de l'altitude et du modèle physique utilisé.

Dans un cadre local idéalisé, on peut fixer :

$$g \approx 9.80665\,\text{m}/\text{s}^2 \ .$$

Si le cadre fixe une valeur exacte ou conventionnelle de g, alors on peut définir :

$$U_g = \{G_i : \text{valor}\,(G_i) = g\}\,.$$

Une expression dynamique possible est :

$$s(t) = s_0 + v_0\,t - \frac{1}{2}gt^2\ .$$

On en obtient :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\,g\,.$$

Elle peut aussi apparaître au moyen d'une loi de gravitation idéalisée :

$$g = \frac{GM}{r^2},$$

sous les hypothèses d'une masse centrale M, d'une distance r et de la constante gravitationnelle G.

Ces deux expressions appartiennent à U_g seulement si elles déterminent la même valeur de g dans le même cadre physique et avec les mêmes conditions.

Avertissement rigoureux

Il n'est pas correct d'affirmer sans conditions que toutes les expressions contenant le symbole g appartiennent à la même classe.

Seules appartiennent à U_g celles qui déterminent exactement la même valeur fixée par le modèle.

---

11. Différentiation et intégration comme processus limites

La différentiation et l'intégration apparaissent dans FR_49 comme deux modes complémentaires d'opérer avec des limites.

11.1 Différentiation

La dérivée est définie par :

$$f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}.$$

Ce processus prend une variation :

$$dx$$

et étudie son comportement lorsque :

$$dx \to 0.$$

La dérivée exprime un taux instantané de changement.

11.2 Intégration

L'intégrale définie peut être construite comme limite de sommes de Riemann :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Ici apparaît une somme finie indexée par :

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Le passage au continu se réalise par le raffinement :

$$n \to \infty$$

et

$$\max_k \Delta x_k \to 0 .$$

Ainsi, l'intégrale unit une structure discrète de sommes avec un objet continu d'aire ou d'accumulation.

11.3 Théorème fondamental du calcul

Si f est continue sur $[a, b]$ et si l'on définit :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

alors :

$$F'(x) = f(x)$$

pour tout $x \in (a, b)$.

De plus, si F est une primitive de f, alors :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) .$$

Ce résultat relie différentiation et intégration.

La différentiation étudie la variation locale.

L'intégration reconstruit l'accumulation globale.

Dans FR_49, cette relation renforce l'idée que des processus apparemment opposés peuvent être compatibles dans une même structure.

---

12. Classes exactes et classes limites

Pour éviter l'ambiguïté, il convient de distinguer deux sous-familles :

$$U_\alpha^{\text{exact}} = \{A\text{: valor } (A) = \alpha\}$$

et

$$U_\alpha^{\text{limite}} = \{(A_n)\text{: } \lim_{n \to \infty} A_n = \alpha\}\ .$$

Cette notation demande de la prudence.

Un processus limite complet peut être une expression exacte de α.

Mais les termes finis du processus ne sont pas, en général, des expressions exactes de α.

Ainsi :

$$\lim_{n \to \infty} A_n \in U_\alpha^{\text{exact}}$$

si la limite existe et vaut α.

Mais :

$$A_n \notin U_\alpha^{\text{exact}}$$

pour un n fini, sauf si, pour une raison particulière, $A_n = \alpha$.

On peut donc écrire plus finement :

$$U_\alpha = U_\alpha^{\text{direct}} \cup U_\alpha^{\text{limite}} \cup U_\alpha^{\text{implicite}} \cup U_\alpha^{\text{fonctionnel}},$$

où les catégories peuvent se recouvrir.

---

13. Généralisation à U_{f_i}

Jusqu'ici, on a considéré des constantes. Mais l'idée peut être généralisée aux fonctions.

Soit $f_i : D \to C$ une fonction définie sur un domaine D avec codomaine C.

Nous définissons :

$$U_{f_i} = \{F_j : \text{valor}\,(F_j) = f_i\},$$

où $\text{valor}\,(F_j) = f_i$ signifie que F_j détermine la même fonction que f_i sur le domaine pertinent.

Plus explicitement :

$$F_j \in U_{f_i} \Leftrightarrow \forall x \in D,\ F_j(x) = f_i(x).$$

Si l'on travaille avec des fonctions définies presque partout, des distributions, des classes d'équivalence de fonctions ou des domaines restreints, il faut déclarer le critère d'égalité correspondant.

Exemple

Soit :

$$f(x) = e^x.$$

Alors appartiennent à U_f :

$$x \mapsto e^x,$$

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

et la solution du problème différentiel :

$$y' = y,$$
$$y(0) = 1\ .$$

Ces trois représentations déterminent la même fonction sur R.

Elles appartiennent donc à une même classe U_f .

Théorème 3 — Équivalence fonctionnelle

Soit D un domaine et soient $F, G{:}D \longrightarrow C$. Si :

$$\forall x \in D,\ F(x) = G(x),$$

alors F et G appartiennent à la même classe d'équivalence fonctionnelle.

Démonstration

Par hypothèse, F et G ont la même valeur en chaque point de D.

Ils déterminent donc la même fonction comme relation entre les éléments de D et les éléments de C.

Donc :

$$F \sim_f G\ .$$

Ce qui démontre le résultat.

---

14. Théorèmes et corollaires principaux

Théorème 4 — Invariant de valeur

Soit $\alpha \in R$. Si A et B sont des constructions mathématiques bien définies et :

$$\text{valor}\,(A) = \text{valor}\,(B) = \alpha,$$

alors A et B sont équivalentes relativement à U_α.

Démonstration

C'est immédiat par définition de $\sim_\alpha$.

Corollaire 3 — Distinction de procédé

Deux expressions peuvent appartenir à la même classe U_α sans être le même procédé.

Démonstration

L'appartenance à U_α exige l'égalité de valeur, non l'égalité syntaxique ni l'égalité de méthode.

Ainsi, si deux procédés différents déterminent α, tous deux appartiennent à U_α tout en restant des procédés différents.

Corollaire 4 — Non-équivalence structurelle de N et R

L'existence d'un lien discret-continu pour une constante α n'implique pas que N et R soient équivalents comme structures.

Démonstration

Du fait que :

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$$

et

$$\lim_{dx \to 0} Q(F, x, dx) = \alpha$$

il s'ensuit seulement que les deux constructions déterminent la même valeur α.

Il ne s'ensuit aucune bijection structurelle, aucun homéomorphisme, aucun isomorphisme de corps, aucune équivalence d'ordre complet ni aucune égalité entre N et R.

La conclusion valide est donc l'appartenance commune à U_α, non l'identité entre domaines.

---

15. Conjectures et extensions

Les idées suivantes doivent être traitées comme des conjectures ou des programmes de recherche, non comme des théorèmes démontrés dans ce document.

Conjecture 1 — Croissance ouverte de $U_{\alpha}^{\text{connu}}$

Pour des constantes mathématiquement riches comme e, π et φ, l'ensemble des expressions connues qui les déterminent peut croître indéfiniment avec de nouveaux cadres, de nouvelles identités et de nouvelles traductions entre théories.

Cela n'affirme pas que U_{α} soit littéralement inépuisable dans tout langage formel fixé.

Cela affirme que, dans la pratique mathématique, le catalogue reconnu d'expressions peut s'élargir sans que la valeur α change.

Conjecture 2 — Noeuds de compatibilité

Des constantes comme e, π et φ peuvent être interprétées comme des noeuds de compatibilité entre différentes régions des mathématiques.

Par exemple, π relie géométrie, analyse, trigonométrie, séries et intégration.

e relie croissance, calcul différentiel, séries, limites discrètes et équations différentielles.

φ relie algèbre, récurrences, proportions et limites de suites.

Cette lecture est structurelle et conceptuelle. Elle ne remplace pas les démonstrations particulières de chaque identité.

Conjecture 3 — Extension UNIHOLOG

Dans le cadre UNIHOLOG, chaque famille U_{f_i} peut être étudiée comme un réseau d'expressions équivalentes qui révèle des connexions entre domaines discrets, continus, algébriques, géométriques, dynamiques et physiques.

La partie démontrable consiste à vérifier, cas par cas, que deux expressions déterminent le même objet.

La partie conjecturale consiste à interpréter le réseau complet comme architecture de compatibilité entre théories.

---

16. Synthèse finale

FR_49 n'affirme pas que N et R soient la même chose.

Il affirme quelque chose de plus subtil et mathématiquement défendable :

$$N \xrightarrow{n} \vec{\alpha} \xleftarrow{\infty dx} R \longrightarrow 0$$

lorsqu'il existe des constructions discrètes et continues qui déterminent le même $\alpha \in R$.

La constante α agit comme invariant.

La classe U_α réunit les expressions qui déterminent cette même valeur.

Dans le cas de e :

$$N \xrightarrow{n} \vec{e} \xleftarrow{\infty dx} R \longrightarrow 0.$$

Dans le cas de π :

$$N \xrightarrow{n} \overrightarrow{\pi} \xleftarrow{\infty} \overrightarrow{R} \xrightarrow{\Delta x} 0.$$

Dans le cas de φ :

$$N \xrightarrow{n} \overrightarrow{\varphi} \xleftarrow{\infty \text{ algebra}} \overrightarrow{R}.$$

Dans le cas général :

$$U_{f_i} = \{F_j : \forall x \in D,\ F_j(x) = f_i(x)\}\ .$$

La puissance de FR_49 réside dans la distinction soigneuse entre :

1. domaine de construction ;
2. procédé ;
3. expression ;
4. processus limite ;
5. valeur exacte ;
6. classe d'équivalence ;
7. interprétation conjecturale.

Avec cette séparation, le pont entre discret et continu cesse d'être une affirmation vague et devient une structure rigoureuse :

des chemins différents peuvent conserver un même objet.

Cet objet commun est le lien.