FR_50: — Primalité structurelle des classes U_c et degré de ñ

Víctor Estrada Díaz
UNIHOLOG

Résumé

Dans FR_49, l'idée d'une classe U_c a été introduite comme l'ensemble des expressions qui déterminent une même constante c.

Ce document poursuit cette construction et pose une question plus profonde : si une constante est représentée par une classe U_c, cette classe peut-elle être considérée comme primaire, ou dépend-elle structurellement d'autres classes ?

La question se formule au moyen d'une notion de primalité structurelle et au moyen de l'ordre structurel de dépendance :

$$\text{osd}\,(U_c)\,.$$

Le cas central est la constante géométrique ñ, définie dans le cadre UNIHOLOG comme une relation entre deux géométries. Bien qu'elle puisse s'écrire

$$\text{ñ} = 8\pi l_p^2\,,$$

son sens ne provient pas de G, mais d'une relation géométrique préalable. Ainsi, la question n'est pas de savoir si ñ peut s'écrire avec l_p, mais si $U_{\text{ñ}}$ est une classe première ou une classe composée.

1. Point de départ

Soit c une constante.

Nous définissons U_c comme l'ensemble des expressions qui déterminent exactement la même valeur c :

$$U_c = \{A\text{: valor}\,(A) = c\}\,.$$

Deux expressions A et B appartiennent à la même classe U_c si elles déterminent toutes deux la même valeur :

$$A \sim_c B \Leftrightarrow \text{valor}(A) = \text{valor}(B) = c\,.$$

Cette définition n'identifie pas les procédés entre eux. Une expression algébrique exacte, une suite, une intégrale, une dérivée ou une fraction continue peuvent appartenir à la même classe si elles déterminent la même valeur.

Par exemple :

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

et

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

sont des expressions différentes, mais toutes deux appartiennent à U_e.

2. Expressions primaires et expressions dérivées

Toutes les expressions d'une classe U_c n'ont pas la même valeur structurelle.

Si une expression est obtenue par une transformation triviale d'une autre expression déjà connue, elle n'ouvre pas une nouvelle voie vers la constante.

Par exemple, si

$$A \in U_c\,,$$

alors aussi :

$$A + 0 \in U_c\,,$$
$$A \cdot 1 \in U_c\,,$$
$$\frac{2A}{2} \in U_c\,.$$

Ces expressions appartiennent formellement à U_c, mais elles ne sont pas primaires.

Nous appellerons expression primaire de U_c une expression qui détermine c et qui ne se présente pas comme une simple transformation triviale d'une autre expression déjà incluse dans le catalogue.

Cette notion est relative au savoir disponible. Une expression peut sembler primaire jusqu'à ce qu'une dérivation la relie à une expression antérieure.

Ainsi, nous définissons provisoirement :

$U_c^{\text{prim}} = \{A \in U_c : A \text{ n'est pas une dérivée triviale d'une autre expression connue de } U_c\}$.

3. Génération entre classes

Soit B une famille de classes :

$$B = \{U_{c_1}, U_{c_2}, \ldots, U_{c_k}\}.$$

Nous dirons qu'une constante c est générable depuis B s'il existe une fonction admissible F telle que :

$$c = F(c_1, c_2, \ldots, c_k).$$

Dans ce cas :

$$U_c \subseteq \text{Gen}(B).$$

Ici $\text{Gen}(B)$ représente l'ensemble des classes obtenables à partir de B par des opérations admises.

Ces opérations peuvent inclure somme, produit, quotient, puissances, racines, limites, séries, produits infinis, intégrales, dérivées ou fonctions spéciales, pourvu qu'elles soient bien définies et justifiées.

Par exemple, si :

$$A \in U_\alpha$$

et

$$B \in U_\beta,$$

alors :

$$A + B \in U_{\alpha+\beta},$$

$$AB \in U_{\alpha\beta},$$

et, si $\beta \neq 0$:

$$\frac{A}{B} \in U_{\alpha/\beta}.$$

4. Primalité structurelle

L'analogie avec les nombres premiers apparaît lorsque l'on demande si une classe peut être obtenue à partir d'autres classes.

Un nombre premier ne se décompose pas comme produit non trivial d'entiers plus petits.

De manière analogue, une classe U_c peut être dite structurellement première si elle n'est pas obtenue comme combinaison non triviale d'autres classes indépendantes.

Nous définissons :

$$U_c \text{ est première relativement à } B$$

si :

$$c \notin \text{Gen}\,(B \setminus \{U_c\})\,.$$

Cela ne signifie pas que U_c soit dépourvue de structure interne.

Une classe première peut contenir de nombreuses expressions :

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in U_c\ .$$

Ce qui est nié n'est pas la multiplicité interne des expressions, mais la dépendance externe envers d'autres classes.

5. Développement interne au moyen de N

Toute constante calculable admet au moins une représentation au moyen d'une suite indexée par les nombres naturels.

C'est-à-dire que, pour une constante calculable c, il existe une suite rationnelle ou réelle :

$$a{:}N \to Q$$

telle que :

$$\lim_{n \to \infty}\ a_n = c\,.$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \to \infty}\ a_n \in U_c\ .$$

Cela montre qu'une classe peut être structurellement première et, en même temps, admettre des développements internes infinis.

La primalité n'exclut pas le développement.

Elle exclut seulement la dépendance générative non triviale envers d'autres classes.

6. Ordre structurel de dépendance

Nous définissons l'ordre structurel de dépendance d'une classe U_c comme :

$$\text{osd}\,(U_c)\,.$$

Informellement, $\text{osd}\,(U_c)$ mesure le nombre minimal de classes nécessaires pour déterminer U_c au moyen d'une relation structurelle fermée.

Une formulation possible est :

$$\text{osd}\,(U_c) = \min\,\{k : \exists R(c, c_1, \ldots, c_k) = 0\},$$

où la relation R doit être non triviale et ne doit pas pouvoir être réduite en éliminant l'une des classes participantes.

Si :

$$\text{osd}\,(U_c) = 1,$$

alors U_c se comporte comme une classe primaire.

Si :

$$\text{osd}\,(U_c) > 1,$$

alors U_c apparaît comme partie d'une relation minimale avec d'autres classes.

7. L'identité d'Euler

L'identité d'Euler est :

$$e^{i\pi} + 1 = 0\,.$$

Cette relation relie les classes :

$$U_e,\quad U_i,\quad U_\pi,\quad U_1,\quad U_0\,.$$

Elle n'affirme pas que :

$$U_e = U_\pi .$$

Elle n'affirme pas non plus que e et π soient la même constante.

Ce qu'elle montre, c'est qu'il existe une relation structurelle fermée dans laquelle ces classes apparaissent simultanément.

Si l'une d'elles est prise comme inconnue, les autres sont nécessaires pour la reconstruire dans cette relation.

Par exemple, formellement :

$$e^{i\pi} = -1 .$$

Si l'on tente d'isoler π, on obtient :

$$\pi = \frac{\log(-1)}{i},$$

mais cette expression exige déjà la structure complexe, l'unité, le zéro, l'exponentielle et un choix de branche du logarithme.

Ainsi, Euler n'élimine pas l'indépendance de e, π ou i. Il montre une relation minimale où aucune de ces classes ne peut être retirée sans modifier la structure.

8. Indépendance et relation ne sont pas la même chose

Deux classes peuvent être indépendantes et néanmoins être reliées.

L'indépendance générative affirme qu'une classe ne s'obtient pas depuis une autre par les règles admises :

$$U_a \not\subseteq \text{Gen}\,(U_b) .$$

Mais il peut exister une relation :

$$R(a, b) = 0 .$$

Il faut donc distinguer :

dépendance générative

de :

relation structurelle.

L'identité d'Euler est précisément un exemple de relation structurelle profonde entre des classes qui ne se réduisent pas trivialement les unes aux autres.

9. Le cas de ñ

Dans UNIHOLOG, la constante ñ se présente comme une constante géométrique.

Elle peut s'écrire :

$$\text{ñ} = 8\pi l_p^2 \ .$$

Mais cette écriture ne doit pas nécessairement être interprétée dans le sens :

$$G \longrightarrow l_p \longrightarrow \text{ñ} \ .$$

Dans le cadre UNIHOLOG, la direction conceptuelle est :

$$\text{relation entre deux géométries} \longrightarrow \text{ñ} \longrightarrow l_p^2 \longrightarrow G \ .$$

Autrement dit, ñ n'est pas introduite comme une constante dérivée de G, mais comme une relation géométrique préalable.

Ensuite, si l'on utilise :

$$l_p^2 = \frac{(\frac{h}{2\pi})G}{c^3},$$

alors :

$$\text{ñ} = \frac{4hG}{c^3} \ .$$

Et donc :

$$G = \frac{\text{ñ}c^3}{4h} \ .$$

Ainsi, dans ce cadre, G n'est pas primaire relativement à ñ.

Au contraire :

$$U_G \subseteq \text{Gen}\,(U_{\text{ñ}}, U_c, U_h) \ .$$

Donc :

$$U_G \text{ est composée relativement à } U_{\tilde{n}} .$$

10. Anticircularité de ñ

L'objection de circularité dit :

$$\tilde{n} = 8\pi l_p^2$$

et :

$$l_p^2 = \frac{(\frac{h}{2\pi})G}{c^3} .$$

Il semblerait donc que ñ dépende de G.

Mais cette objection n'est valable que si G est pris comme prémisse.

Si ñ est obtenue indépendamment comme relation géométrique entre deux structures, alors G n'est pas une prémisse, mais une conséquence :

$$G = \frac{\tilde{n}c^3}{4h} .$$

La même égalité peut être lue dans deux directions.

La lecture standard est :

$$G \rightarrow l_p^2 \rightarrow \tilde{n} .$$

La lecture UNIHOLOG est :

$$\tilde{n} \rightarrow l_p^2 \rightarrow G .$$

Il n'y a donc pas circularité si la dérivation de ñ est géométrique et indépendante de G.

11. La question ouverte

Nous ne connaissons pas encore le degré structurel de ñ.

La question est :

$$\text{osd } (U_{\tilde{n}}) = 1$$

ou :

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) > 1\,.$$

Si :

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) = 1,$$

alors $U_{\tilde{n}}$ serait une classe primaire.

Dans ce cas, ñ serait une valeur géométrique qui ne dépend pas d'autres classes pour être déterminée.

Si :

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) > 1,$$

alors il devra exister une relation mathématique ou géométrique minimale :

$$R(\tilde{n}, c_1\,, c_2\,, \ldots, c_k\,) = 0\,.$$

Dans ce cas, ñ ne serait pas une constante primaire isolée, mais une constante émergente d'une relation structurelle plus profonde.

12. Conséquence conceptuelle

La recherche de ñ ne consiste pas à chercher une combinaison numérique quelconque.

La recherche correcte est :

$$\exists R{:}R(\tilde{n}, c_1\,, \ldots, c_k\,) = 0$$

où R est :

- non triviale ;
- minimale ;
- géométriquement interprétable ;
- indépendante de G comme prémisse ;
- capable de déterminer ñ.

Si une telle relation est trouvée, alors l'ordre structurel de dépendance de $U_{\tilde{n}}$ aura été identifié.

Si aucune relation de ce type n'existe et que ñ ne dépend que d'elle-même comme relation géométrique primaire, alors :

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) = 1\,.$$

13. Conclusion

FR_49 a permis de définir des classes d'expressions U_c.

FR_50 introduit une nouvelle question :

quelles classes sont structurellement premières ?

L'identité d'Euler montre que plusieurs classes peuvent être reliées dans une structure minimale sans se réduire trivialement les unes aux autres.

Le cas de ñ pose une question analogue :

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) = 1 \quad \text{ou} \quad \text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) > 1$$

Si $U_{\tilde{n}}$ est première, alors ñ exprime une constante géométrique irréductible.

Si elle ne l'est pas, il faudra trouver un jour une relation mathématique ou géométrique minimale qui la détermine.

Dans les deux cas, G est situé comme une classe dérivée relativement à ñ, et non comme son fondement.