IT_50: — Primalità strutturale delle classi U_c e grado di ñ

Víctor Estrada Díaz
UNIHOLOG

Riassunto

In IT_49 è stata introdotta l'idea di una classe U_c come insieme delle espressioni che determinano una stessa costante c.

Questo documento prosegue tale costruzione e pone una domanda più profonda: se una costante è rappresentata da una classe U_c, tale classe può essere considerata primaria, oppure dipende strutturalmente da altre classi?

La questione si formula mediante una nozione di primalità strutturale e mediante l'ordine strutturale di dipendenza:

$$\text{osd}\,(U_c)\,.$$

Il caso centrale è la costante geometrica ñ, definita nel quadro UNIHOLOG come una relazione tra due geometrie. Sebbene possa essere scritta come

$$\text{ñ} = 8\pi l_p^2\,,$$

il suo senso non proviene da G, ma da una relazione geometrica precedente. Perciò la questione non è se ñ possa essere scritta usando l_p, ma se $U_{\text{ñ}}$ sia una classe prima o una classe composta.

1. Punto di partenza

Sia c una costante.

Definiamo U_c come l'insieme delle espressioni che determinano esattamente lo stesso valore c:

$$U_c = \{A\text{: valor } (A) = c\} .$$

Due espressioni A e B appartengono alla stessa classe U_c se entrambe determinano lo stesso valore:

$$A \sim_c B \Leftrightarrow \text{valor } (A) = \text{ valor } (B) = c .$$

Questa definizione non identifica tra loro i procedimenti. Un'espressione algebrica esatta, una successione, un integrale, una derivata o una frazione continua possono appartenere alla stessa classe se determinano lo stesso valore.

Per esempio:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

sono espressioni diverse, ma entrambe appartengono a U_e.

2. Espressioni primarie ed espressioni derivate

Non tutte le espressioni di una classe U_c hanno lo stesso valore strutturale.

Se un'espressione si ottiene tramite una trasformazione triviale di un'altra espressione già nota, non apre una nuova via verso la costante.

Per esempio, se

$$A \in U_c ,$$

allora anche:

$$A + 0 \in U_c\,,$$

$$A \cdot 1 \in U_c\,,$$

$$\frac{2A}{2} \in U_c\ .$$

Queste espressioni appartengono formalmente a U_c, ma non sono primarie.

Chiameremo espressione primaria di U_c un'espressione che determina c e che non si presenta come una semplice trasformazione triviale di un'altra espressione già inclusa nel catalogo.

Questa nozione è relativa alla conoscenza disponibile. Un'espressione può apparire primaria finché non si trova una derivazione che la collega a un'espressione precedente.

Pertanto definiamo provvisoriamente:

$U_c^{\text{prim}} = \{A \in U_c : A$ non è derivata triviale di un'altra espressione nota di $U_c\}$.

3. Generazione tra classi

Sia B una famiglia di classi:

$$B = \{U_{c_1}, U_{c_2}, \ldots, U_{c_k}\}\,.$$

Diremo che una costante c è generabile da B se esiste una funzione ammissibile F tale che:

$$c = F(c_1, c_2, \ldots, c_k)\,.$$

In tal caso:

$$U_c \subseteq \text{Gen}\,(B)\,.$$

Qui $\text{Gen}\,(B)$ rappresenta l'insieme delle classi ottenibili da B mediante operazioni ammesse.

Tali operazioni possono includere somma, prodotto, quoziente, potenze, radici, limiti, serie, prodotti infiniti, integrali, derivate o funzioni speciali, purché siano ben definite e giustificate.

Per esempio, se:

$$A \in U_\alpha$$

e

$$B \in U_\beta,$$

allora:

$$A + B \in U_{\alpha+\beta},$$

$$AB \in U_{\alpha\beta},$$

e, se $\beta \neq 0$:

$$\frac{A}{B} \in U_{\alpha/\beta}\ .$$

4. Primalità strutturale

L'analogia con i numeri primi appare quando ci chiediamo se una classe possa essere ottenuta da altre.

Un numero primo non si scompone come prodotto non triviale di interi minori.

In modo analogo, una classe U_c può essere chiamata strutturalmente prima se non si ottiene come combinazione non triviale di altre classi indipendenti.

Definiamo:

$$U_c \text{ è prima rispetto a } B$$

se:

$$c \notin \text{Gen}\,(B \backslash \{U_c\})\,.$$

Questo non significa che U_c sia priva di struttura interna.

Una classe prima può contenere molte espressioni:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in U_c .$$

Ciò che si nega non è la molteplicità interna di espressioni, ma la dipendenza esterna rispetto ad altre classi.

5. Sviluppo interno mediante N

Ogni costante computabile ammette almeno una rappresentazione mediante una successione indicizzata dai numeri naturali.

Cioè, per una costante computabile c, esiste una successione razionale o reale:

$$a{:}N \to Q$$

tale che:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = c .$$

Pertanto:

$$\lim_{n \to \infty} a_n \in U_c .$$

Questo mostra che una classe può essere strutturalmente prima e, allo stesso tempo, ammettere sviluppi interni infiniti.

La primalità non esclude lo sviluppo.

Esclude soltanto la dipendenza generativa non triviale rispetto ad altre classi.

6. Ordine strutturale di dipendenza

Definiamo l'ordine strutturale di dipendenza di una classe U_c come:

$$\mathrm{osd}\,(U_c) .$$

Informalmente, $\text{osd}\,(U_c)$ misura il numero minimo di classi necessarie per determinare U_c mediante una relazione strutturale chiusa.

Una possibile formulazione è:

$$\text{osd}\,(U_c) = \min\,\{k : \exists R(c, c_1, \ldots, c_k) = 0\},$$

dove la relazione R deve essere non triviale e non deve potersi ridurre eliminando una delle classi partecipanti.

Se:

$$\text{osd}\,(U_c) = 1,$$

allora U_c si comporta come una classe primaria.

Se:

$$\text{osd}\,(U_c) > 1,$$

allora U_c appare come parte di una relazione minima con altre classi.

7. L'identità di Euler

L'identità di Euler è:

$$e^{i\pi} + 1 = 0\,.$$

Questa relazione connette le classi:

$$U_e, \quad U_i, \quad U_\pi, \quad U_1, \quad U_0\,.$$

Non afferma che:

$$U_e = U_\pi\,.$$

Non afferma nemmeno che e e π siano la stessa costante.

Ciò che mostra è che esiste una relazione strutturale chiusa nella quale queste classi appaiono simultaneamente.

Se una di esse viene presa come incognita, le altre sono necessarie per ricostruirla all'interno di tale relazione.

Per esempio, formalmente:

$$e^{i\pi} = -1 .$$

Se si tenta di isolare π, appare:

$$\pi = \frac{\log(-1)}{i},$$

ma questa espressione richiede già la struttura complessa, l'unità, lo zero, l'esponenziale e una scelta di ramo del logaritmo.

Pertanto Euler non elimina l'indipendenza di e, π o i. Mostra una relazione minima nella quale nessuna di queste classi può essere rimossa senza cambiare la struttura.

8. Indipendenza e relazione non sono la stessa cosa

Due classi possono essere indipendenti e, tuttavia, essere correlate.

L'indipendenza generativa afferma che una classe non si ottiene da un'altra mediante le regole ammesse:

$$U_a \notin \text{Gen}(U_b) .$$

Ma può esistere una relazione:

$$R(a, b) = 0 .$$

Pertanto si deve distinguere:

dipendenza generativa

da:

relazione strutturale.

L'identità di Euler è precisamente un esempio di relazione strutturale profonda tra classi che non si riducono in modo triviale le une alle altre.

9. Il caso di ñ

In UNIHOLOG, la costante ñ si presenta come una costante geometrica.

Può essere scritta:

$$ñ = 8\pi l_p^2 .$$

Ma questa scrittura non deve necessariamente essere interpretata nel senso:

$$G \longrightarrow l_p \longrightarrow ñ .$$

Nel quadro UNIHOLOG, la direzione concettuale è:

$$\text{relazione tra due geometrie} \longrightarrow ñ \longrightarrow l_p^2 \longrightarrow G .$$

Cioè, ñ non viene introdotta come una costante derivata da G, ma come una relazione geometrica precedente.

Poi, se si usa:

$$l_p^2 = \frac{(\frac{h}{2\pi})G}{c^3},$$

allora:

$$ñ = \frac{4hG}{c^3} .$$

E quindi:

$$G = \frac{ñc^3}{4h} .$$

Così, in questo quadro, G non è primaria rispetto a ñ.

Al contrario:

$$U_G \subseteq \text{Gen}\,(U_{\tilde{n}}, U_c, U_h)\,.$$

Pertanto:

$$U_G \text{ è composta rispetto a } U_{\tilde{n}}\,.$$

10. Anticircolarità di ñ

L'obiezione di circolarità dice:

$$\tilde{n} = 8\pi l_p^2$$

e:

$$l_p^2 = \frac{(\frac{h}{2\pi})G}{c^3}\,.$$

Pertanto sembrerebbe che ñ dipenda da G.

Ma questa obiezione è valida solo se G viene preso come premessa.

Se ñ si ottiene indipendentemente come relazione geometrica tra due strutture, allora G non è premessa, ma conseguenza:

$$G = \frac{\tilde{n}c^3}{4h}\,.$$

La stessa uguaglianza può essere letta in due direzioni.

La lettura standard è:

$$G \rightarrow l_p^2 \rightarrow \tilde{n}\,.$$

La lettura UNIHOLOG è:

$$\tilde{n} \rightarrow l_p^2 \rightarrow G\,.$$

Pertanto non vi è circolarità se la derivazione di ñ è geometrica e indipendente da G.

11. La domanda aperta

Non conosciamo ancora il grado strutturale di ñ.

La domanda è:

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) = 1$$

oppure:

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) > 1\,.$$

Se:

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) = 1,$$

allora $U_{\tilde{n}}$ sarebbe una classe primaria.

In tal caso, ñ sarebbe un valore geometrico che non dipende da altre classi per essere determinato.

Se:

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) > 1,$$

allora dovrà esistere una relazione matematica o geometrica minima:

$$R(\tilde{n}, c_1, c_2, \ldots, c_k) = 0\,.$$

In tal caso, ñ non sarebbe una costante primaria isolata, ma una costante emergente da una relazione strutturale più profonda.

12. Conseguenza concettuale

La ricerca di ñ non consiste nel cercare una combinazione numerica qualunque.

La ricerca corretta è:

$$\exists R{:}R(\tilde{n}, c_1, \ldots, c_k) = 0$$

dove R sia:

- non triviale;
- minima;
- geometricamente interpretabile;
- indipendente da G come premessa;
- capace di determinare ñ.

Se tale relazione viene trovata, allora sarà stato identificato l'ordine strutturale di dipendenza di $U_{\tilde{n}}$.

Se tale relazione non esiste e ñ dipende solo da se stessa come relazione geometrica primaria, allora:

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) = 1\,.$$

13. Conclusione

IT_49 ha permesso di definire classi di espressioni U_c.

IT_50 introduce una nuova domanda:

quali classi sono strutturalmente prime?

L'identità di Euler mostra che varie classi possono essere correlate in una struttura minima senza ridursi trivialmente le une alle altre.

Il caso di ñ pone una domanda analoga:

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) = 1 \quad \text{oppure} \quad \text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) > 1$$

Se $U_{\tilde{n}}$ è prima, allora ñ esprime una costante geometrica irriducibile.

Se non è prima, allora un giorno dovrà essere trovata una relazione matematica o geometrica minima che la determini.

In entrambi i casi, G viene situata come una classe derivata rispetto a ñ, non come suo fondamento.