PT_50: — Primalidade estrutural das classes U_c e o grau de ñ

Víctor Estrada Díaz
UNIHOLOG

Resumo

Em PT_49 foi introduzida a ideia de uma classe U_c como o conjunto de expressões que determinam uma mesma constante c.

Este documento continua essa construção e coloca uma pergunta mais profunda: se uma constante fica representada por uma classe U_c, essa classe pode ser considerada primária, ou depende estruturalmente de outras classes?

A questão formula-se mediante uma noção de primalidade estrutural e mediante a ordem estrutural de dependência:

$$\text{osd}\,(U_c)\,.$$

O caso central é a constante geométrica ñ, definida no quadro UNIHOLOG como uma relação entre duas geometrias. Embora possa escrever-se como

$$\tilde{n} = 8\pi l_p^2\,,$$

o seu sentido não procede de G, mas de uma relação geométrica prévia. Por isso, a questão não é se ñ pode escrever-se usando l_p, mas se $U_{\tilde{n}}$ é uma classe prima ou uma classe composta.

1. Ponto de partida

Seja c uma constante.

Definimos U_c como o conjunto de expressões que determinam exatamente o mesmo valor c:

$$U_c = \{A: \text{valor } (A) = c\} .$$

Duas expressões A e B pertencem à mesma classe U_c se ambas determinam o mesmo valor:

$$A \sim_c B \Leftrightarrow \text{valor } (A) = \text{ valor } (B) = c .$$

Esta definição não identifica os procedimentos entre si. Uma expressão algébrica exata, uma sucessão, uma integral, uma derivada ou uma fração contínua podem pertencer à mesma classe se determinarem o mesmo valor.

Por exemplo:

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

e

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

são expressões distintas, mas ambas pertencem a U_e.

2. Expressões primárias e expressões derivadas

Nem todas as expressões de uma classe U_c têm o mesmo valor estrutural.

Se uma expressão se obtém por uma transformação trivial de outra expressão já conhecida, ela não abre uma via nova para a constante.

Por exemplo, se

$$A \in U_c ,$$

então também:

$$A + 0 \in U_c ,$$

$$A \cdot 1 \in U_c,$$

$$\frac{2A}{2} \in U_c\ .$$

Estas expressões pertencem formalmente a U_c, mas não são primárias.

Chamaremos expressão primária de U_c a uma expressão que determina c e que não se apresenta como uma simples transformação trivial de outra expressão já incluída no catálogo.

Esta noção é relativa ao conhecimento disponível. Uma expressão pode parecer primária até que se encontre uma derivação que a conecte com outra expressão anterior.

Portanto, definimos provisoriamente:

$U_c^{\text{prim}} = \{A \in U_c : A \text{ não é derivada trivial de outra expressão conhecida de } U_c\}$.

3. Geração entre classes

Seja B uma família de classes:

$$B = \{U_{c_1}, U_{c_2}, \ldots, U_{c_k}\}.$$

Diremos que uma constante c é gerável a partir de B se existe uma função admissível F tal que:

$$c = F(c_1, c_2, \ldots, c_k).$$

Nesse caso:

$$U_c \subseteq \text{Gen}(B).$$

Aqui $\text{Gen}(B)$ representa o conjunto de classes obteníveis a partir de B mediante operações admitidas.

Essas operações podem incluir soma, produto, quociente, potências, raízes, limites, séries, produtos infinitos, integrais, derivadas ou funções especiais, desde que estejam bem definidas e justificadas.

Por exemplo, se:

$$A \in U_\alpha$$

e

$$B \in U_\beta,$$

então:

$$A + B \in U_{\alpha+\beta},$$

$$AB \in U_{\alpha\beta},$$

e, se $\beta \neq 0$:

$$\frac{A}{B} \in U_{\alpha/\beta}\ .$$

4. Primalidade estrutural

A analogia com os números primos aparece quando perguntamos se uma classe pode obter-se a partir de outras.

Um número primo não se decompõe como produto não trivial de inteiros menores.

De modo análogo, uma classe U_c pode chamar-se estruturalmente prima se não se obtém como combinação não trivial de outras classes independentes.

Definimos:

$$U_c \text{ é prima relativamente a } B$$

se:

$$c \notin \text{ Gen } (B \backslash \{U_c\})\,.$$

Isto não significa que U_c careça de estrutura interna.

Uma classe prima pode conter muitas expressões:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in U_c\ .$$

O que se nega não é a multiplicidade interna de expressões, mas a dependência externa relativamente a outras classes.

5. Desenvolvimento interno mediante N

Toda constante computável admite pelo menos uma representação mediante uma sucessão indexada por números naturais.

Isto é, para uma constante computável c, existe uma sucessão racional ou real:

$$a{:}N \to Q$$

tal que:

$$\lim_{n \to \infty} \; a_n = c \, .$$

Portanto:

$$\lim_{n \to \infty} \; a_n \in U_c \, .$$

Isto mostra que uma classe pode ser estruturalmente prima e, ao mesmo tempo, admitir desenvolvimentos internos infinitos.

A primalidade não exclui o desenvolvimento.

Só exclui a dependência generativa não trivial relativamente a outras classes.

6. Ordem estrutural de dependência

Definimos a ordem estrutural de dependência de uma classe U_c como:

$$\text{osd}\,(U_c)\,.$$

Informalmente, $\text{osd}\,(U_c)$ mede o número mínimo de classes necessárias para determinar U_c mediante uma relação estrutural fechada.

Uma formulação possível é:

$$\text{osd}\,(U_c) = \; \min\,\{k{:}\exists R(c, c_1, \ldots, c_k) = 0\},$$

onde a relação R deve ser não trivial e não deve poder reduzir-se eliminando uma das classes participantes.

Se:

$$\text{osd}\,(U_c) = 1,$$

então U_c comporta-se como uma classe primária.

Se:

$$\text{osd}\,(U_c) > 1,$$

então U_c aparece como parte de uma relação mínima com outras classes.

7. A identidade de Euler

A identidade de Euler é:

$$e^{i\pi} + 1 = 0\,.$$

Esta relação conecta as classes:

$$U_e\,, \quad U_i\,, \quad U_\pi\,, \quad U_1\,, \quad U_0\,.$$

Não afirma que:

$$U_e = U_\pi\,.$$

Também não afirma que e e π sejam a mesma constante.

O que mostra é que existe uma relação estrutural fechada na qual estas classes aparecem simultaneamente.

Se uma delas for tomada como incógnita, as outras são necessárias para reconstruí-la dentro dessa relação.

Por exemplo, formalmente:

$$e^{i\pi} = -1\,.$$

Se se tenta isolar π, aparece:

$$\pi = \frac{\log(-1)}{i},$$

mas esta expressão exige já a estrutura complexa, a unidade, o zero, a exponencial e uma escolha de ramo do logaritmo.

Portanto, Euler não elimina a independência de e, π ou i. Mostra uma relação mínima onde nenhuma dessas classes pode retirar-se sem alterar a estrutura.

8. Independência e relação não são a mesma coisa

Duas classes podem ser independentes e, ainda assim, estar relacionadas.

A independência generativa afirma que uma classe não se obtém a partir de outra mediante as regras admitidas:

$$U_a \notin \text{Gen}\,(U_b)\,.$$

Mas pode existir uma relação:

$$R(a, b) = 0\,.$$

Portanto, deve distinguir-se:

dependência generativa

de:

relação estrutural.

A identidade de Euler é precisamente um exemplo de relação estrutural profunda entre classes que não se reduzem de maneira trivial umas às outras.

9. O caso de ñ

Em UNIHOLOG, a constante ñ apresenta-se como uma constante geométrica.

Pode escrever-se:

$$\text{ñ} = 8\pi l_p^2 \ .$$

Mas esta escrita não deve interpretar-se necessariamente no sentido:

$$G \longrightarrow l_p \longrightarrow \text{ñ} \ .$$

No quadro UNIHOLOG, a direção conceptual é:

$$\text{relação entre duas geometrias} \longrightarrow \text{ñ} \longrightarrow l_p^2 \longrightarrow G \ .$$

Isto é, ñ não se introduz como uma constante derivada de G, mas como uma relação geométrica prévia.

Depois, se se usa:

$$l_p^2 = \frac{(\frac{h}{2\pi})G}{c^3},$$

então:

$$\text{ñ} = \frac{4hG}{c^3} \ .$$

E portanto:

$$G = \frac{\text{ñ}c^3}{4h} \ .$$

Assim, neste quadro, G não é primária relativamente a ñ.

Pelo contrário:

$$U_G \subseteq \text{Gen}\,(U_{\text{ñ}}, U_c, U_h) \ .$$

Portanto:

$$U_G \text{ é composta relativamente a } U_{\text{ñ}} \ .$$

10. Anticircularidade de ñ

A objeção de circularidade diz:

$$\text{ñ} = 8\pi l_p^2$$

e:

$$l_p^2 = \frac{(\frac{h}{2\pi})G}{c^3}.$$

Portanto, pareceria que ñ depende de G.

Mas essa objeção só é válida se G for tomado como premissa.

Se ñ se obtém independentemente como relação geométrica entre duas estruturas, então G não é premissa, mas consequência:

$$G = \frac{\text{ñ}c^3}{4h}.$$

A mesma igualdade pode ler-se em duas direções.

A leitura padrão é:

$$G \rightarrow l_p^2 \rightarrow \text{ñ}.$$

A leitura UNIHOLOG é:

$$\text{ñ} \rightarrow l_p^2 \rightarrow G.$$

Portanto, não há circularidade se a derivação de ñ é geométrica e independente de G.

11. A pergunta aberta

Ainda não conhecemos o grau estrutural de ñ.

A pergunta é:

$$\text{osd}\,(U_{\text{ñ}}) = 1$$

ou:

$$\text{osd}\,(U_{\text{ñ}}) > 1.$$

Se:

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) = 1,$$

então $U_{\tilde{n}}$ seria uma classe primária.

Nesse caso, ñ seria um valor geométrico que não depende de outras classes para ficar determinado.

Se:

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) > 1,$$

então deverá existir uma relação matemática ou geométrica mínima:

$$R(\tilde{n}, c_1, c_2, \ldots, c_k) = 0\,.$$

Nesse caso, ñ não seria uma constante primária isolada, mas uma constante emergente de uma relação estrutural mais profunda.

12. Consequência conceptual

A busca de ñ não consiste em procurar uma combinação numérica qualquer.

A busca correta é:

$$\exists R : R(\tilde{n}, c_1, \ldots, c_k) = 0$$

onde R seja:

- não trivial;
- mínima;
- geometricamente interpretável;
- independente de G como premissa;
- capaz de determinar ñ.

Se tal relação for encontrada, então terá sido identificada a ordem estrutural de dependência de $U_{\tilde{n}}$.

Se tal relação não existe e ñ depende apenas de si mesma como relação geométrica primária, então:

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) = 1\,.$$

13. Conclusão

PT_49 permitiu definir classes de expressões U_c.

PT_50 introduz uma nova pergunta:

quais classes são estruturalmente primas?

A identidade de Euler mostra que várias classes podem estar relacionadas numa estrutura mínima sem se reduzirem trivialmente umas às outras.

O caso de ñ coloca uma pergunta análoga:

$$\text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) = 1 \quad \text{ou} \quad \text{osd}\,(U_{\tilde{n}}) > 1$$

Se $U_{\tilde{n}}$ é prima, então ñ expressa uma constante geométrica irredutível.

Se não é prima, então algum dia deverá encontrar-se uma relação matemática ou geométrica mínima que a determine.

Em ambos os casos, G fica situado como uma classe derivada relativamente a ñ, não como o seu fundamento.