

Relatividad Holográfica Determinista — Versión Rigurosa (esqueleto)

0. Notación y objetivo

- (c) velocidad de la luz, (h) y ($\hbar = h/2\pi$) constantes de Planck.
- (ℓ) longitud holográfica (escala a definir por hipótesis).
- (λ_h) longitud de onda asociada a una masa: ($\lambda_h = h/(M c)$).
- Queremos: (i) definir (n) de forma física y matemática rigurosa; (ii) derivar las consecuencias formales para ($g(n)$) y para el reemplazo ($G \rightarrow g_{\text{hol}}$); (iii) separar demostraciones de conjeturas.

1. Supuestos (explícitos — deben mantenerse)

A1 (Holografía de confinamiento). El confinamiento físico de grados de libertad relevantes para la masa de una partícula se realiza en una **superficie** (S) de dimensión (d_S) (en nuestro caso ($d_S=2$)).

A2 (Ondas y condiciones de contorno). Las excitaciones asociadas a una partícula se describen, en régimen apropiado, por un campo escalar (ψ) que satisface en la superficie (S) una ecuación de onda lineal homogénea (p. ej. ($\square_S + \kappa)\psi = 0$)) con condiciones de contorno que definen un problema de valores propios auto-adjunto.

A3 (Estabilidad $\leftrightarrow$ modos estacionarios). Un estado es estable y permanente sólo si corresponde a un modo estacionario (autoparte temporal ($e^{-i\omega t}$)) del problema de valores propios en (S).

A4 (Modo entero). Para garantizar estabilidad y conservación por simetrías de la frontera, definimos un número entero (n) que cuenta el número efectivo de ciclos/winding de la función de onda a lo largo de la(s) dirección(es) cerradas relevantes de (S) (esto requiere hipótesis geométricas que se hacen explícitas más abajo).

A5 (Empírica). Los valores observados de la gravedad están alineados con una ley exponencial en (n), es decir, los datos sugieren ($\log g(n)$) lineal en (n). (Esta hipótesis será tratada como empírica/conjetural y usada sólo para ajustar constantes).

Comentario: si alguna de A1–A4 no se cumple en un modelo microscópico concreto, las proposiciones que siguen deben reinterpretarse en ese contexto.

2. Definición matemática de (n)

Bajo A2–A4, consideremos el problema de valores propios sobre la superficie cerrada (S) con métrica inducida (g_{ab}^S). Sea (Δ_S) el laplaciano de (S). Buscamos soluciones separables de la forma

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (-\Delta_S + V(\mathbf{x}))\Phi = \lambda\Phi,$$

con condiciones de contorno auto-adjuntas en (S). Denotemos por ($\{\Phi_k\}$) la base ortonormal de autofunciones y ($\{\lambda_k\}$) los autovalores discretos (ordenados).

Definición 2.1 (Número de modos efectivo (n)).

Si existe una dirección cerrada (o conjunto de ciclos independientes) (γ) en (S) tal que la autofunción relevante tiene un comportamiento oscilatorio dominante a lo largo de (γ), podemos

definir el número de ciclos (n) mediante la condición de cuantización (en la aproximación eikonal o de onda estacionaria)

$$kL_\gamma = 2\pi n,$$

donde ($k=\sqrt{\lambda}$) es el número de onda efectivo y (L_γ) la longitud geométrica del ciclo (γ). Aquí ($n\in\mathbb{Z}^+$) por construcción de ciclos completos.

Observación: esta definición es local y requiere la existencia de ciclos bien definidos donde la aproximación de onda plana sea válida. En superficies con alta curvatura o sin ciclos globales simples, se requiere una generalización (ver sección de Conjeturas).

3. Proposición (discreción de n) por estabilidad)

Proposición 3.1. Bajo A2–A4 y si la frontera (S) admite una o varias direcciones cerradas ($\{\gamma_i\}$) con longitudes (L_i), los estados estacionarios físicamente estables están indexados por un conjunto de enteros ($n_i\in\mathbb{Z}^+$) que cumplen ($k_i L_i=2\pi n_i$). En particular, el número total de ciclos efectivo (n) es entero.

Demostración (esquemática). El problema de valores propios en (S) es auto-adjunto $\Rightarrow$ espectro real y base discreta de autofunciones. En la aproximación semiclasica (WKB) sobre ciclos cerrados, la condición de fase bohr–sommerfeld ($\oint k \, dl = 2\pi n$) es necesaria para obtener modos cuasi-estacionarios que se reproducen una vuelta tras otra sin interferencia destructiva. Por tanto (n) entero. (Detalles técnicos: requiere que la longitud de coherencia sea mayor que la escala de curvatura local y que no existan pérdidas dissipativas significativas; ver referencias estándar de WKB en variedades compactas). ■

Comentario técnico: la demostración completa exige hipótesis de regularidad y ausencia de dispersión hacia el exterior; éstas están recogidas en A1–A4.

4. Relación con masa y energía

Bajo la hipótesis de que la energía asociada al modo estacionario (n) se interpreta como masa (M) (relación de Planck–Einstein local), podemos escribir:

$$M(n) \sim \frac{h}{\lambda_h c}, \quad \lambda_h \sim \frac{\alpha_1}{k(n)}.$$

La constante (α_1) depende del modelo (p. ej. factores geométricos).

5. Definición y forma funcional propuesta de $g(n)$

Hecho empírico / ajuste inicial (conjetural). Los datos y los argumentos heurísticos conducen a modelar la familia de acoplamientos por

$$g(n) = A e^{-n}$$

con (A) una normalización que puede fijarse por condiciones físicas (por ejemplo, exigir que $g(2)$ reproduzca la constante Newtoniana observable (G), o que ($A=\alpha\hbar c/\ell^2$) según una hipótesis holográfica más fuerte).

- Si se impone la coincidencia con Newton clásico: $(g(2)=G) \Rightarrow (A=G e^{\{2\}})$.
- Alternativamente, si se adopta la forma holográfica $(g(n)=\big(\alpha\hbar c/\ell^2\big)e^{\{-n\}})$, se deja explícito el origen microscópico del acoplamiento.

Nota de rigor: la relación exponencial es una **conjetura empírica** en tanto que requiere justificación teórica a partir de un modelo microfísico (por ejemplo, un conteo discreto de microestados cuyo número escala como $(e^{\{n\}})$ o una penalización energética por añadir modos). Hasta que exista esa derivación, la tratamos como hipótesis a contrastar.

6. Consecuencias formales (derivaciones condicionales)

Bajo las definiciones previas:

- Reemplazo en Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi g(n)}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Expresando $(g(n))$ por $(A e^{\{-n\}})$ o por $(\alpha\hbar c/\ell^2 e^{\{-n\}})$ obtenemos fórmulas explícitas para radios de Schwarzschild, Friedmann, etc., que se pueden escribir de forma exacta en términos de $(n, \ell, \alpha, \lambda_h)$. (Estos pasos son algebraicos y se incluyen en el apéndice técnico.)

- **Testabilidad:** fijando $(n=2)$ y eligiendo (A) para reproducir (G) se obtienen predicciones coincidentes con GR a gran escala; variaciones en (n) conducen a desviaciones cuantificables que pueden compararse con datos PPN, ondas gravitacionales y cosmología.

7. Lo que podemos demostrar hoy (resumen)

- Bajo A1–A4 y con suposiciones regulares, los modos estacionarios sobre una frontera cerrada conducen a un índice entero (n) (Proposición 3.1).
- El formalismo de valores propios en superficies compactas garantiza discreción del espectro y la posibilidad de aplicar condiciones de cuantización semiclasicas.
- Dado un $(g(n))$ funcional, las consecuencias para las métricas (Schwarzschild, FLRW) se deducen algebraicamente y son exactas (no heurísticas).

8. Lo que no podemos demostrar todavía (conjeturas a probar)

- Derivar desde primera-principios microfísicos (p. ej. un modelo de frontera cuántica, CFT o conteo de microestados) la forma exacta $(g(n)=A e^{\{-n\}})$.
 - Probar que para cualquier superficie (S) relevante físicamente la cantidad (n) definida por (Def. 2.1) exista y sea la variable que gobierna la fuerza gravitatoria universal.
 - Demostrar riguroso-mente la igualdad entre la energía del modo estacionario y la masa observada, más allá de escalas y factores de orden.
 - Justificar la elección específica $(n=2)$ como estabilidad global (aunque hay argumentos físicos plausibles: 2D es la mínima dimensión de frontera para codificar área/entropía; se necesita una prueba dinámica de estabilidad de vacíos para cerrarlo).
-

9. Estrategia para completar las demostraciones (próximos pasos formales)

1. **Modelo microfísico:** proponer una teoría de frontera (p. ej. CFT o red cuántica discreta) donde se pueda contar microestados y derivar la penalización exponencial por modos.
 2. **Análisis espectral:** estudiar la familia de problemas $((-\Delta_S + V)\Phi = \lambda\Phi)$ en superficies topológicas relevantes (esfera (S^2), toro (T^2), etc.) y relacionar (n) con índices topológicos (winding numbers, índices de Morse) en casos simétricos.
 3. **Estimación energética:** calcular la energía del modo estacionario en modelos sencillos (cavidad esférica, membrana) y comparar con la relación masa–longitud de onda.
 4. **Contraste observacional:** convertir la libertad de (A, ℓ, α) en límites numéricos usando tests PPN, LIGO, cosmología y datos de agujeros negros.
 5. **Publicación:** redactar artículos separando resultados demostrados de las conjeturas, con apéndices técnicos.
-

10. Apéndice técnico (esquema de derivaciones algebraicas)

(Se incluye derivación formal de Schwarzschild y Friedmann sustituyendo $(G \mapsto g(n))$; se calcula $(r_s(n))$ y se expone la forma del potencial newtoniano efectivo. Estas son manipulaciones algebraicas, válidas si se acepta $(g(n))$.)

11. Conclusión (rigurosa y honesta)

- **Hecho demostrable:** la discreción de los modos estacionarios en una frontera auto-adjunta lleva a índices cuantizados $(n \in \mathbb{Z}^+)$.
 - **Hipótesis plausible pero no demostrada aún:** la familia $(g(n))$ depende exponencialmente de (n) con la forma $(g(n) = A e^{-n})$. Eso demanda un modelo microscópico para ser una afirmación de primera-principios.
 - **Compromiso:** todas las afirmaciones del trabajo final deben etiquetarse como “Teorema/Proposición (demostrable bajo A1–A4)” o “Conjetura/Modelo (requerir derivación microfísica)”.
-